Лекция IV.

Цель лекции № 4.

Ознакомившись с данной лекцией студент должен знать:

1. Суть каждого из ниже рассмотренных методов.
2. Уметь применять данные методы при решении задач.

14. **Методы расчета сложных электрических цепей.**

Метод наложения (суперпозиции).

Метод наложения основан на применении принципа наложения, который формулируется следующим образом:

Ток в любой ветви электрической цепи равен сумме токов, обусловленных действием каждого источника в отдельности, при отсутствии других источников.

Рассматриваемый принцип называют принципом независимого действия.

При действии только одного из источников напряжения предполагается, что э.д.с. всех остальных источников равны нулю, так же как равны нулю и токи всех источников тока. Отсутствие напряжения на зажимах источников напряжения равносильно короткому замыканию их зажимов. Отсутствие тока в ветви с источником тока равносильно разрыву этой ветви.

Если источник э.д.с. содержит внутреннее сопротивление, то, полагая э.д.с. равной нулю, следует оставлять в его ветви внутреннее сопротивление. Аналогично в случае источника тока с параллельной внутренней проводимостью, следует, разрывая ветвь источника (т.е. полагая J=0), оставлять включенной параллельную ветвь с внутренним сопротивлением.

Пусть в цепи действуют источники с параметрами E и J, $I^{//}_n$ и $I^{/}_n$ – токи n-ой ветви, создаваемые каждым из этих источников в отдельности. Искомый ток

$$I_n = I_n^{/} + I^{//}_n.$$

Принцип суперпозиции применим к напряжениям, т.к. между током и напряжением рассматривается линейная зависимость (закон Ома); но не применим к мощности:

$$P_n \neq P^{/}_n + P^{//}_n,$$

т.к. мощности – это квадратичные функции токов.

Пример.

Дано: E=60В; J=2А; R_1=5Ом; R_2=20Ом; R_3=10Ом; R_4=15Ом

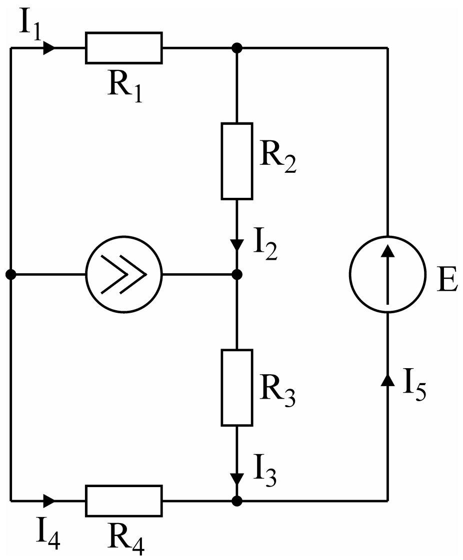


Рис.1

Определить все токи методом наложения.

Решение:

1. Заменяем источник э.д.с. E короткозамкнутым участком (т.к. его $r_{вн}=0$) (схема рис.2).

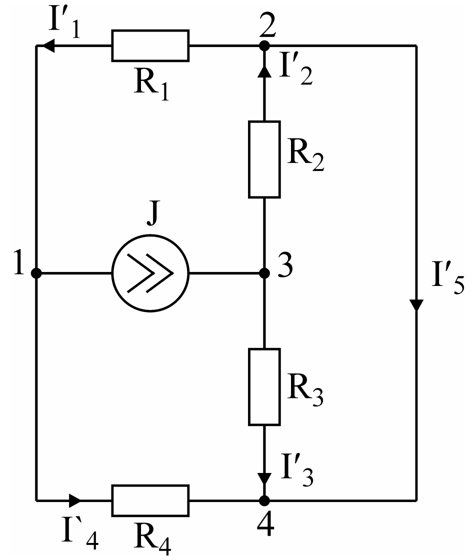


Рис.2

Т.к. конфигурация цепи изменилась, то в цепи рис.2 протекают токи отличные от токов цепи рис.1. Их называют первые частичные токи и обозначают со штрихом.

Т.к. схема упростилась, то токи можно рассчитать, применяя правило плеч. Схему цепи рис.2 более наглядно представим на рис.3.

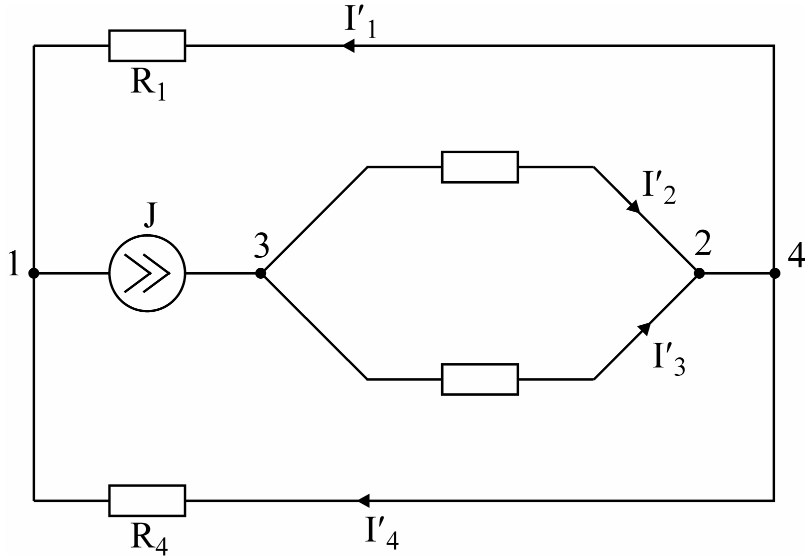


Рис.3

$$I_4' = J\frac{R_1}{R_1 + R_4} = 2 \cdot \frac{5}{5+15} = 0{,}5A$$

$$I_1' = J - J_4' = 2 - 0{,}5 = 1{,}5A$$

$$I_2' = J\frac{R_3}{R_2 + R_3} = 2 \cdot \frac{10}{20+10} = 0{,}66A$$

$$I_3' = 2 - 0{,}66 = 1{,}34A$$

$$I_5' = I_2' - I_1' = 0{,}66 - 1{,}5 = -0{,}84A$$

2. Разорвем ветвь с источником тока J. Токи, протекающие в цепи рис.4 называют вторыми частичными токами и обозначают с двумя штрихами.

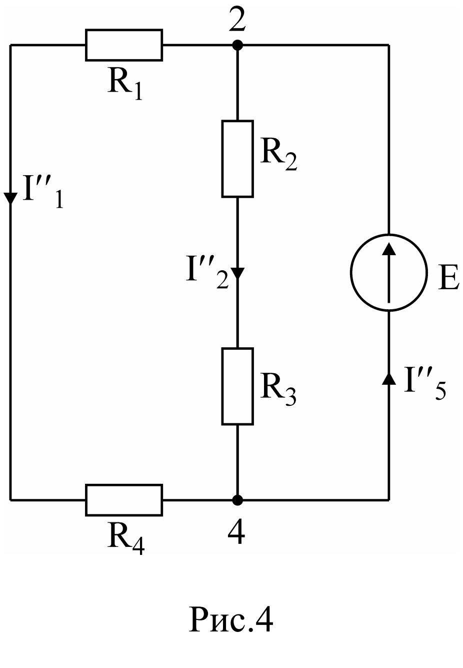


Рис.4

$$I_2^{//} = \frac{E_1}{R_2 + R_3} = \frac{60}{20+10} = 2A;$$

$$I_1^{//} = \frac{E_1}{R_1 + R_4} = \frac{60}{5+15} = 3A;$$

$$I_5^{//} = I_1^{//} + I_2^{//} = 5A.$$

3. Искомые токи найдем как алгебраическую (т.е. с учетом направлений) сумму частичных токов:

$$I_1 = -I_1^{/} - I_1^{//} = -1{,}5 - 3 = -4{,}5A$$

$$I_2 = -I_2^{/} + I_2^{//} = -0{,}66 + 2 = 1{,}34A$$

$$I_3 = I_3^{/} + I_2^{//} = 1{,}34 + 2 = 3{,}33A$$

$$I_4 = -I_4^{/} + I_1^{//} = -0{,}5 + 3 = 2{,}5A$$

$$I_5 = I_4 + I_3 = 2{,}5 + 3{,}33 = 5{,}83A$$

<u>Входные и передаточные проводимости.</u>

Решение системы уравнений по законам Кирхгофа для линейной цепи, содержащей источники тока и источники э.д.с., имеет вид

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= y_{11}E_1 + y_{12}E_2 + \ldots + y_{1n}E_k \\ I_2 &= y_{21}E_1 + y_{22}E_2 + \ldots + y_{2n}E_k \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ I_n &= y_{n1}E_1 + y_{n2}E_2 + \ldots + y_{nk}E_k \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

где y_{nk} - коэффициенты, не зависящие от тока.

Структура уравнений (27) соответствует принципу суперпозиций: ток в n-ой ветви равен сумме токов от действия каждого отдельного источника:

$$I_n = I_n^{/} + I_n^{//} + \ldots,$$

где $I_n^{/} = y_{n1}E_1; \quad I_n^{//} = y_{n2}E_2$ и т.д.

Коэффициенты y_{nk} при э.д.с. имеют размерность проводимости.

Коэффициенты с одинаковыми индексами (y_{11}, y_{22}…)называют <u>собственными</u> или <u>входными проводимостями.</u>

Их <u>физический смысл</u> очевиден: они численно равны току ветви при действии единственной э.д.с. в 1 Вольт, включенной в эту самую ветвь.

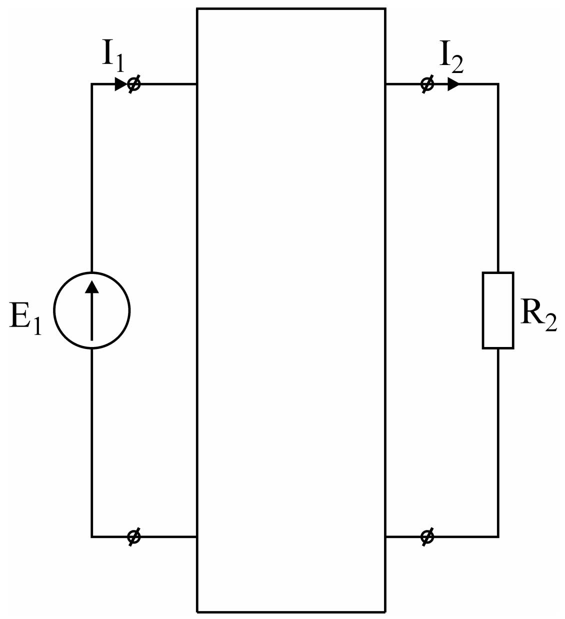


Рис.27

Входная (собственная) проводимость цепи рис.27

$$y_{11} = \frac{I_1}{E_1} \qquad (27,а)$$

Величину, обратную входной проводимости, называют входным сопротивлением.

Для цепи рис. 27 $\qquad R_{1вх} = \frac{1}{y_{11}}$

Только для неразветвленной цепи понятие входная проводимость (сопротивление) совпадает с элементарным понятием проводимости (сопротивления).

Коэффициенты с разными индексами (y_{12}, y_{13} и т.д.) называют передаточными или взаимными проводимостями.

Их физический смысл: передаточная проводимость между ветвью 2 и ветвью 1, т.е. y_{21}, равна току в ветви 2 при действии в ветви 1 э.д.с. равной 1 В.

Для цепи на рис.27 $y_{21} = \frac{I_2}{E_1}$. $\qquad$ (27, в)

∗ Из приведенного определения коэффициентов y_{nk} в сочетании с принципом суперпозиции возможна такая характеристика:

возрастание тока в ветви 2 (или 1) при возрастании э.д.с. E_1 в ветви 1 равно проводимости y_{21} (или y_{11}), умноженной на приращение э.д.с. E_1:

$$y_{21} = \frac{\partial I_2}{\partial E_1}; \quad y_{11} = \frac{\partial I_1}{\partial E_1} \qquad (28)$$

∗Очевидно, что $y_{21}=y_{12}$

Метод контурных токов.

Метод контурных токов – один из основных и широко применяемых на практике методов. Он заключается в определении по второму закону Кирхгофа контурных токов. Для каждого контура цепи задают ток, который остается неизменным. В цепи протекает столько контурных токов, сколько независимых контуров в ней содержится. Направление контурного тока выбирают произвольно.

Контурные токи, проходя через узел, остаются непрерывными. Следовательно, первый закон Кирхгофа выполняется автоматически. Уравнения с контурными токами записываются только для второго закона Кирхгофа. Число уравнений, составленных по методу контурных токов, меньше чем по методу законов Кирхгофа.

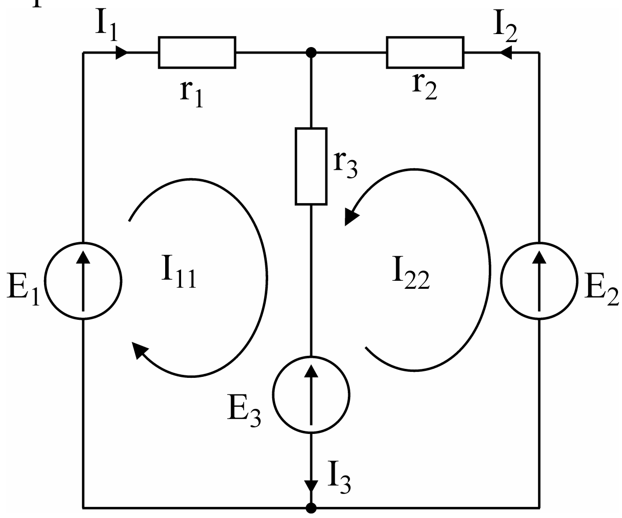


Рис.28. Иллюстрация к методу контурных токов.

На рис.28 показана цепь с двумя независимыми контурами, следовательно, и с двумя контурными токами I_{11} и I_{22}.

Токи в ветвях I_1 и I_2 равны контурным токам:

$I_1=I_{11}$, $I_2=I_{22}$

Ток I_3 равен сумме этих двух контурных токов:

$I_3=I_{11}+I_{22}$

По второму закону Кирхгофа для первого контура цепи:

$I_1r_1+I_3r_3=E_1-E_3$

Или: $I_{11}r_1+(I_{11}+I_{22})r_3=E_1-E_3$;

$I_{11}\,(r_1+r_2)+I_{22}r_3=E_1-E_3$

Обозначим $r_1+r_2=r_{11}$

$r_3=r_{12}$; E_1-E_3

Тогда: $I_{11}r_{11}+I_2r_{12}=E_{11}$

r_{11} – сумма всех сопротивлений, входящих в контур I, называется <u>собственным сопротивлением контура.</u>

r_{12} – сопротивление ветви, общей для контура I и II;

$E_{11}=E_1-E_2$ – алгебраическая сумма всех э.д.с., содержащихся в первом контуре; со знаком «-» берется э.д.с., действующая навстречу контурному току рассматриваемого контура.

E_{11} называется контурной э.д.с.

Аналогично для второго контура рис.28.

$I_{11}r_{21}+I_{22}r_{22}=E_{22}$,

где $r_{21}=r_3$; $r_{22}=r_2+r_3$;

$E_{22}=E_2-E_3$

Уравнения, составленные по методу контурных токов, всегда записывают в виде системы. Для схемы рис.28:

$$\begin{cases} I_{11}r_{11}+I_{22}r_{12}=E_{11} \\ I_{11}r_{21}+I_{22}r_{22}=E_{22} \end{cases}$$

В результате решения системы находят контурные токи, а затем токи ветвей.

Если заданная электрическая цепь содержит n независимых контуров, то на основании второго закона Кирхгофа получается n контурных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} I_{11}r_{11}+I_{22}r_{12}+\ldots+I_{nn}r_{1n}=E_{11} \\ I_{11}r_{21}+I_{22}r_{22}+\ldots+I_{nn}r_{2n}=E_{22} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ I_{11}r_{n1}+I_{22}r_{n2}+\ldots+I_{nn}r_{nn}=E_{nn} \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Собственные сопротивления r_{ii} входят в уравнения (29) со знаком «+», поскольку обход контура принимается совпадающим с положительным направлением контурного тока I_{ii}. Общие сопротивления r_{ik} войдут в уравнения со знаком «-», когда токи I_i и I_k направлены в них встречно.

Число уравнений, составляемых по методу контурных токов, определяется по формуле:

$N_{ур}=N_b-N_y+1-N_{и.т.}$

где N_b – число ветвей электрической цепи;

N_y – число узлов;

$N_{и.т.}$ – число идеальных источников тока.

Если в цепи отсутствуют источники тока, число уравнений равно числу контурных токов и, соответственно, числу независимых контуров рассматриваемой электрической цепи.

Пример.

Решим пример 2 параграфа 11, используя метод контурных токов.

Цепь содержит три контура, через которые протекают контурные токи.

При наличии источников тока надо так направлять контурные токи, чтобы они протекали через данные источники. Но через один источник тока не может протекать два контурных тока.

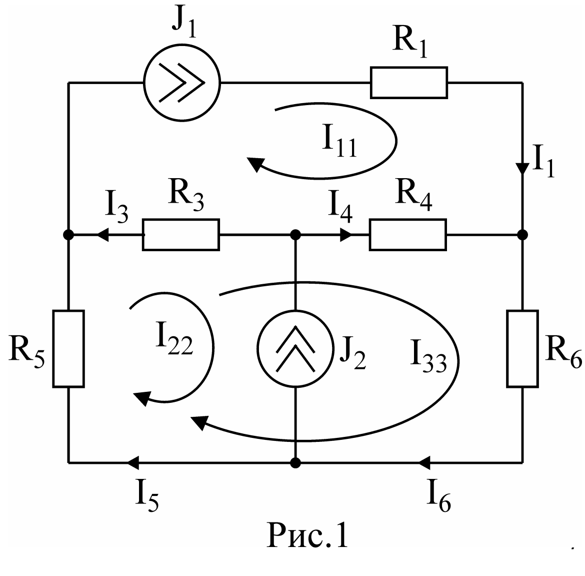


Рис.1

На рис.1 обозначены положительные направления контурных токов. Очевидно, что $I_{11}=J_1$; $I_{22}=-J_2$

Контурный ток I_{33} – неизвестен, для него составляем уравнение:

$I_{33}(R_3+R_4+R_5+R_6)-I_{11}(R_3+R_4)+I_{22}(R_5+R_3)=0$

В правой части уравнения стоит «0», т.к. отсутствует контурная э.д.с.

В результате решения определяем I_{33}=16,25 мА

Итак: $I_1=I_{11}$=20мА; $I_3=I_{11}-I_{22}-I_{33}$=20-(-10)-16,25=13,75мА.

$I_4=-I_{11}+I_{33}$=-20+16,25=-3,75мА;

$I_5=I_{22}+I_{33}$=-10+16,25=6,25мА;

$I_6=I_{33}$=16,25мА.

Метод узловых напряжений.

Метод узловых напряжений заключается в определении на основании первого закона Кирхгофа потенциалов в узлах электрической цепи относительного некоторого базисного узла. Базисный узел в общем случае выбирается произвольно, потенциал этого узла принимается равным нулю. Разности потенциалов рассматриваемого и базисного узлов называется узловым напряжением.

На рис.29 представлена схема электрической цепи, содержащая пять ветвей и три узла. За базисный принят узел с индексом «0».

Узловое напряжение $U_{10}=\varphi_1-\varphi_0$. Положительное напряжение узловых напряжений указывается стрелкой от рассматриваемого узла к базисному.

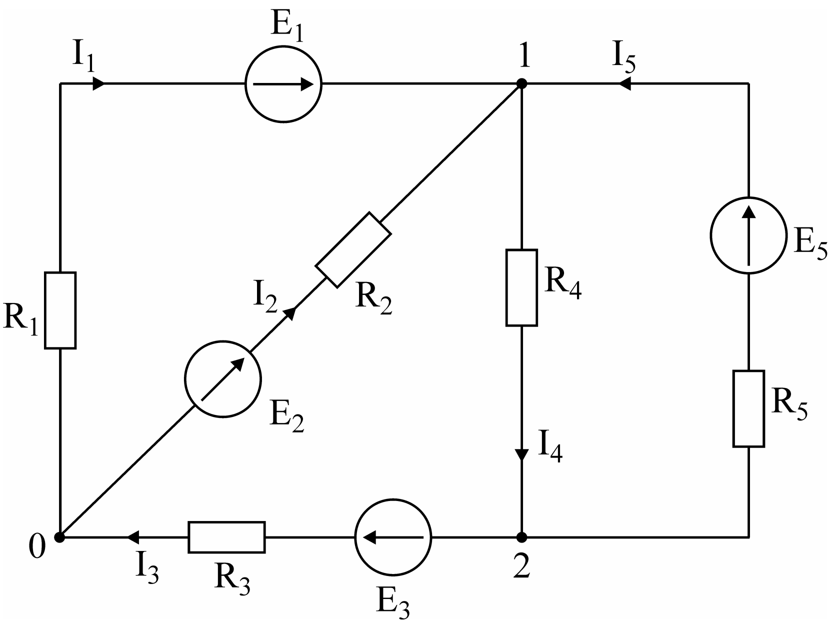


Рис.29. Иллюстрация к методу узловых напряжений.

Напряжение на ветвях цепи равно, очевидно, разности узловых напряжений концов данной ветви. Например, напряжение ветви 4 равно:
$U_4=I_4R_4=U_{10}-U_{20}$ (30)

Из формулы (30) видно, что, зная узловые напряжения, можно найти ток ветви.

Структуру уравнений получим, рассматривая схему рис.30.

Т.к. узел с индексом «0» принят за базисный, то его потенциал равен нулю. Узловые напряжения (потенциалы) узлов 1 и 2 – неизвестны.

Уравнения по первому закону Кирхгофа для 1 и 2 узлов соответственно записываются:

$$\left.\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_4 + I_5 = 0 \\ -I_3 + I_4 - I_5 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

Узловое напряжение $\left.\begin{aligned} U_{10} = \varphi_0 - I_1R_1 + E_1 \\ U_{10} = \varphi_0 - I_2R_2 + E_2 \end{aligned}\right\}$ (32)

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} I_1 = \frac{E_1 - U_{10}}{R_1} = E_1q_1 - U_{10}q_1 \\ I_2 = \frac{E_2 - U_{10}}{R_2} = E_2q_2 - U_{10}q_2 \end{aligned}\right\} \qquad (33,а)$$

Аналогично для оставшихся токов:

$$\left.\begin{aligned} I_3 = U_{20}q_3 + E_3q_3 \\ I_4 = U_{10}q_4 - U_{20}q_4 \\ I_5 = U_{20}q_5 - U_{10}q_5 + E_5q_5 \end{aligned}\right\} \qquad (33,б)$$

Выражения (33,а,б) подставляем в систему (31) и после некоторых арифметических преобразований получаем:

$$\left.\begin{aligned} U_{10}(q_1 + q_2 + q_4 + q_5) - U_{20}(q_4 + q_5) = E_1q_1 + E_2q_2 + E_5q_5 \\ -U_{10}(q_4 + q_5) + U_{20}(q_3 + q_5 + q_4) = -E_3q_3 - E_5q_5 \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Обозначим $q_{11}=q_1+q_2+q_4+q_5$ – собственная проводимость узла 1.

$q_{22}=q_3+q_4+q_5$ – собственная проводимость узла 2.

$q_{12}=q_{21}=q_4+q_5$ – взаимная проводимость ветви, соединяющей узлы 1 и 2.

$I_{у1}=E_1q_1+E_2q_2+E_5q_5$ – узловой ток узла 1.

$I_{у2}=-E_3q_3-E_5q_5$ – узловой ток узла 2.

Из приведенных выражений видно:

Собственная проводимость узла равна сумме проводимостей ветвей, сходящихся в данном узле.

Взаимная проводимость равна сумме проводимостей ветвей, соединяющих данные узлы.

Узловой ток (теоретическое понятие) – это алгебраическая сумма произведений E_iq_i и J_i источников тока (если они есть) всех ветвей, примыкающих к рассматриваемому узлу. Слагаемое входит в выражение со знаком «+», если э.д.с. и источник тока направлены к узлу. В противном случае – ставится знак «-».

После введенных обозначений система (34) принимает вид:

$$
\left.\begin{aligned}
U_{10}q_{11} - U_{20}q_{12} &= I_{y1} \\
-U_{10}q_{21} + U_{20}q_{22} &= I_{y2}
\end{aligned}\right\} \qquad (35)
$$

Из формул (35) видно, что собственная проводимость входит в выражения со знаком «+», а взаимная проводимость – со знаком «-».

Для произвольной схемы, содержащей n+1 узлов, система уравнений по методу узловых напряжений имеет вид:

$$
\left.\begin{aligned}
U_{10}q_{11} - U_{20}q_{12} - \ldots - U_{n0}q_{1n} &= \sum_{1} E_i q_i + \sum_{1} J_k \\
-U_{10}q_{21} + U_{20}q_{22} - \ldots - U_{n0}q_{2n} &= \sum_{2} E_i q_i + \sum_{2} J_k \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
-U_{10}q_{n1} - U_{20}q_{n2} - \ldots + U_{n0}q_{nn} &= \sum_{n} E_i q_i + \sum_{n} J_k
\end{aligned}\right\} \qquad (36)
$$

Число уравнений, составляемое по методу узловых напряжений, равно

$N_{ур}=N_{у}-1-N_{э.д.с.}$ (37)

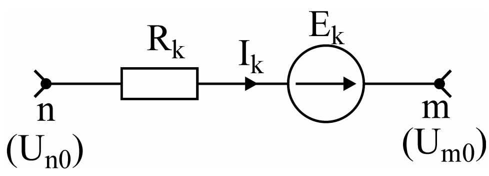
где $N_{э.д.с.}$ – число идеальных источников э.д.с.

Пример: (общий случай)

Пример: (с идеальными э.д.с.)

Порядок расчета электрических цепей по методу узловых напряжений:

1. Выбираем произвольно базисный узел. Желательно нулевой потенциал представить тому узлу, где сходится большее количество ветвей. Если имеется ветвь, содержащая идеальную э.д.с., то базисный узел должен быть концом или началом этой ветви.
2. Составляется система уравнений для неизвестных узловых напряжений в соответствии с общей структурой этих уравнений (36).
3. Решая данную систему, находят напряжения узлов относительно базиса.
4. Токи ветвей определяют по обобщенному закону Ома:



$$
I_k = \frac{U_{n0} - U_{m0} + E_k}{R_k} \qquad (38)
$$

Следствие: Если схема содержит только два узла, то в соответствие с методом узловых напряжений (в отсутствие идеальных э.д.с.) составляется только одно уравнение.

Например, для схемы рис.30:

$U_{10}q_{11}=E_1q_1-E_3q_4+J_2$ (39)

Формула (39) носит название <u>метода двух узлов.</u>

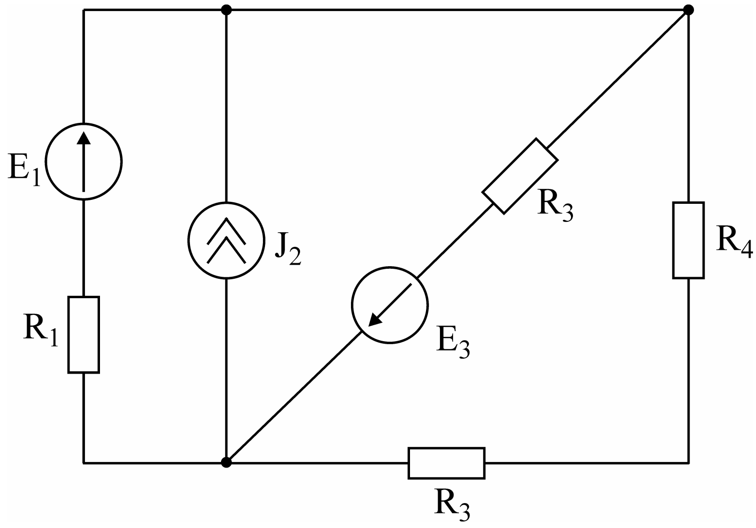


Рис.30. Иллюстрация к методу двух узлов.

Узловое напряжение по методу двух узлов равно:

$$U_{10} = \frac{\sum E_i q_i + \sum J_k}{q_{11}} \tag{40}$$

<u>Пример:</u> Дано: E_1=8В; E_5=12В; R_1=R_3=1 Ом; R_2=R_4=2 Ом; R_5=3 Ом. Определить все токи методом узловых напряжений.

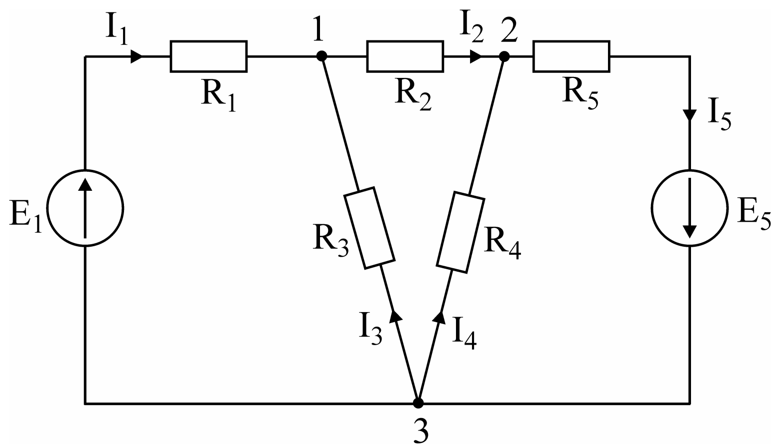


Рис.1

Решение:

Т.к. электрическая цепь содержит три узла и не содержит ветвей с идеальными источниками э.д.с., то число уравнений, составляемых по методу узловых напряжений равно 2.

Узел 3 будем считать базисным.

Тогда $\begin{cases} U_{13}q_{11} - U_{23}q_{12} = I_{y1} \\ -U_{13}q_{21} + U_{23}q_{22} = I_{y2} \end{cases}$

$$q_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = 1 + 0,5 + 1 = 2,5$$

Где

$$q_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = 0,5 + 0,5 + 0,33 = 1,33$$

$$q_{12} = q_{21} = \frac{1}{R_2} = 0,5$$

$$I_{y1} = \frac{E_1}{R_1} = 8; \quad I_{y2} = -\frac{E_5}{R_5} = -4$$

В результате решения системы определяем U_{13}=2,8 В; U_{23}=-1,95 В.
Токи в ветвях определяем по закону Ома:

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{13}}{R_1} = 5,19A \quad I_3 = \frac{-U_{13}}{R_3} = -2,81A \quad I_5 = \frac{U_{23} + E_5}{R_5} = 3,35A$$

$$I_2 = \frac{U_{12} - U_{23}}{R_2} = 2,38A \quad I_4 = \frac{-U_{23}}{R_4} = 0,97A$$

<u>Контрольные вопросы.</u>

1. Сформулировать принцип наложения. Почему он называется принципом независимого действия?
2. Можно ли находить потребляемую мощность, используя метод наложения?
3. Что представляют из себя входные и взаимные проводимости. Физический смысл этих коэффициентов.
4. Изложить суть метода контурных токов, записать систему уравнений для произвольной схемы. Объяснить знаки в уравнениях.
5. Как определяется число уравнений, составляемых по методу контурных токов?
6. Изложить суть метода узловых напряжений. На каком законе основан данный метод?
7. Что означает понятие «узловое напряжение»?
8. Записать систему уравнений по методу узловых напряжений для произвольной схемы, объяснить знаки.
9. Как определить количество уравнений по этому методу?
10. Как учитывается наличие идеальных источников э.д.с. при составлении уравнений?
11. Изложить порядок расчета цепей по методу узловых напряжений.